BIỂU THỨC TỔ HỢP – NHỊ THỨC NEWTON

Bài 1: (ĐHSP TPHCM 1999)

Có bao nhiêu số tự nhiên thỏa mãn $C_{14}^{k} + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$

A. 0

C. 2

B. 1

D. 3

Bài giải

$C_{14}^{k} + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$ $\quad (0 \le k \le 12,\ k \in N)$

$\Leftrightarrow \frac{14!}{k!(14-k)!} + \frac{14!}{(k+2)!(12-k)!} = 2\frac{14!}{(k+1)!(13-k)!}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(14-k)(13-k)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 2\frac{1}{(k+1)(13-k)}$

$\Leftrightarrow (k + 1)(k + 2) + (14 - k)(13 - k) = 2(k + 2)(14 - k)$

$\Leftrightarrow k^2 - 12k + 32 = 0 \quad \Leftrightarrow k = 4$ hoặc $k = 8$

Vậy: $k = 4$ hoặc $k = 8$

Bài 2. (ĐH Ngoại ngữ HN chuyên ban 1999)

Có bao nhiêu số nguyên dương x thoả: $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$

A. 0

C. 2

B. 1

D. 3

Bài giải

$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x \quad (x \in N,\ x \ge 3)$

$\Leftrightarrow x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x = 9x^2 - 14x$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 9x + 14) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \text{(loại)} \\ x = 2 & \text{(loại)} \\ x = 7 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$ Vậy: $x = 7$

Bài 3. (ĐH Bách khoa HN 1999)

Tính tổng: $S = C_{2018}^1 - 2C_{2018}^2 + 3C_{2018}^3 - 4C_{2018}^4 + \ldots - 2018.C_{2018}^{2018}$

A. 0 C. 2

B. 1 D. 3

Bài giải

$S = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \ldots + (-1)^{n-1}.nC_n^n$ $(n > 2)$

Xét đa thức $p(x) = (1 - x)^n$. Khai triển theo công thức Newton ta được:

$$p(x) = (1 - x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k.x^k$$

Suy ra: $-p'(x) = n(1 - x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}.kC_n^k.x^{k-1}$

Cho x = 1 ta được: $0 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}.kC_n^k$

$$= C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \ldots + (-1)^{n-1}.nC_n^n = S$$

Vậy: S = 0

Bài 4. (ĐHQG HN khối B 2000)

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức sau:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}, x \neq 0$$

A. 24310 C. 23049

B. 12339 D. 29103

Bài giải

Số hạng tổng quát của khai triển là:

$$C_{17}^k \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{17-k} \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^k = C_{17}^k \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{17}{12}k - \frac{34}{3}} \quad (k \in N, 0 \le k \le 17)$$

Để số hạng không chứa x thì $\frac{17}{12}k - \frac{34}{3} = 0 \Rightarrow k = 8$

Vậy số hạng cần tìm là số hạng thứ 9 của khai triển và bằng C_{17}^8.

Bài 5. (ĐH Bách khoa HN khối AD 2000)

Có bao nhiêu số tự nhiên x thỏa: $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \frac{6}{x}.C_x^3 + 10$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Bài giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \in N \\ 2 \le 2x \\ 2 \le x \\ 3 \le x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in N \\ x \ge 3 \end{cases}$

Ta có: $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \frac{6}{x}.C_x^3 + 10$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2x(2x-1) - x(x-1) \le \frac{6}{x}.\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + 10$

$\Leftrightarrow x^2 \le x^2 - 3x + 12 \Leftrightarrow x \le 4$

Kết hợp điều kiện, ta được: x = 3, x = 4.

Bài 6. (ĐHSP HN khối A 2000)

Trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$, hãy tìm số hạng không phụ thuộc vào x, biết rằng $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$

A. 812

B. 792

C. 293

D. 392

Bài giải

* Xác định n: $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 79$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 \\ n = -13 \text{ (loại)} \end{cases}$

* Ta có: $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \left(x^{\frac{4}{3}}\right)^k \left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{\frac{48}{15}k - \frac{112}{5}}$

Số hạng không phụ thuộc x $\Leftrightarrow \frac{48}{15}k - \frac{112}{5} = 0 \Leftrightarrow k = 7$.

Vậy số hạng cần tìm là: $C_{12}^{7} = 792$

Bài 7. (ĐHSP HN khối BD 2000)

Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2 + 1)^n$ bằng 1024, hãy tìm hệ số a (a là số tự nhiên) của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.

A. 120

B. 211

C. 210

D. 312

Bài giải

Ta có: $(x^2 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2k}$ (1)

Số k ứng với số hạng ax^{12} thoả mãn pt: $x^{12} = x^{2k} \Rightarrow k = 6$.

Trong (1) cho x = 1 thì $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

Từ giả thiết $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 1024 \Leftrightarrow 2n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$

Vậy hệ số cần tìm là: $C_{10}^{6} = 210$.

Bài 8. (ĐHSP TPHCM khối DE 2000)

Tính tổng: $S = C_{2018}^{0} + \frac{1}{2}C_{2018}^{1} + + \frac{1}{3}C_{2018}^{2} + ... + \frac{1}{2019}C_{2018}^{2018}$

A. $\frac{2^{2020}+1}{2020}$

B. $\frac{2^{2020}-1}{2020}$

C. $\frac{2^{2019}-1}{2019}$

D. $\frac{2^{2019}+1}{2019}$

Bài giải

* Ta có: $I = \int_0^1 (1+x)^n dx = \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

$$* \ I = \int_0^1 (C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n)dx = \left(C_n^0 x + C_n^1 \frac{x^2}{2} + ... + C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)\Bigg|_0^1$$

$$= C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = S$$

Vậy: $S = \dfrac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

Bài 9. (ĐH Kinh tế quốc dân khối A 2000)

Tính tổng: $S = 2^{2017}C_{2018}^1 + 2^{2016}C_{2018}^2 + 2^{2015}C_{2018}^3 + ... + 2018C_{2018}^{2018}$

A. 2016.3^{2017}

B. 2017.3^{2017}

C. 2018.3^{2018}

D. 2018.3^{2017}

$2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-1}C_n^2 + 2^{n-3}C_n^3 + 2^{n-4}C_n^4 + ... + nC_n^n = n.3^{n-1}$

Bài giải

Ta có: $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + C_n^4 x^4 + ... + C_n^n x^n$

Lấy đạo hàm hai vế:

$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + 4C_n^4 x^3 + ... + nC_n^n x^{n-1}$$

Thay $x = \dfrac{1}{2}$, ta được:

$$n\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} = C_n^1 + 2C_n^2.2^{-1} + 3C_n^3 2^{-2} + 4C_n^4.2^{-3} + ... + nC_n^n 2^{-n+1}$$

$$\Rightarrow S = 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-3}C_n^3 + ... + nC_n^n = n3^{n-1}$$

Bài 10.(ĐH Thuỷ lợi 2000)

Hãy tính tổng: $S = \dfrac{1}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + \dfrac{1}{A_4^2} + ... + \dfrac{1}{A_{2018}^2}$

A. $\dfrac{2017}{2018}$

B. $\dfrac{2019}{2020}$

C. $\dfrac{2019}{2018}$

D. $\dfrac{2018}{2017}$

Bài giải

Chứng minh bằng phương pháp qui nạp.

* Với n = 2, đpcm $\Leftrightarrow \frac{1}{A_2^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A_2^2 = 2$ đúng

* Giả sử BĐT cần chứng minh đúng với n = k (k ≥ 2), tức là ta có:

$$\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + \ldots + \frac{1}{A_k^2} = \frac{k-1}{k}$$

Ta cần chứng minh BĐT đúng với n = k + 1.

Thật vậy, $\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + \ldots + \frac{1}{A_k^2} + \frac{1}{A_{k+1}^2} = \frac{k-1}{k} + \frac{1}{A_{k+1}^2} = \frac{k-1}{k} + \frac{1}{(k+1)k}$

$$= \frac{(k^2-1)+1}{(k+1)k} = \frac{k}{k+1}$$

Vậy: $\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + \ldots + \frac{1}{A_n^2} = \frac{n-1}{n}, \forall n \geq 2$

Bài 11.(ĐH Thuỷ lợi II 2000)

Cho đa thức $P(x) = (1 + x)^9 + (1 + x)^{10} + (1 + x)^{11} + \ldots + (1 + x)^{14}$ có dạng khai triển là: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{14}x^{14}$.

Hãy tính hệ số a_9.

A. 2018
B. 3023
C. 3003
D. 2012

Bài giải

$a_9 = 1 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + C_{12}^9 + C_{13}^9 + C_{14}^9$

$= 1 + C_{10}^1 + C_{11}^2 + C_{12}^3 + C_{13}^4 + C_{14}^5$

$= 1 + 10 + \frac{11.10}{2} + \frac{12.11.10}{6} + \frac{13.12.11.10}{24} + \frac{14.13.12.11.10}{120}$

= 3003

Bài 12.(ĐH An ninh nhân dân khối DG 2000)

Tính tổng: $S = C_{2000}^0 + 2C_{2000}^1 + 3C_{2000}^2 + \ldots + 2001C_{2000}^{2000}$

A. 1000.2^{2000} C. 1001.2^{2001}

B. 1001.2^{2000} D. 1000.2^{2001}

Bài giải

Có $(x+1)^{2000} = \sum_{i=0}^{2000} C_{2000}^{i} x^{i}$ (1)

Trong (1) cho x = 1 ta được $\sum_{i=0}^{2000} C_{2000}^{i} = 2^{2000}$

Đạo hàm 2 vế của (1) theo x, ta có: $2000.(x+1)^{1999} = \sum_{i=1}^{2000} i.C_{2000}^{i} x^{i-1}$

Cho x = 1 ta được: $\sum_{i=1}^{2000} i.C_{2000}^{i} = 2000.2^{1999} = 1000.2^{2000}$

Do đó: $S = \sum_{i=0}^{2000} C_{2000}^{i} + \sum_{i=1}^{2000} i.C_{2000}^{i} = 1001.2^{2000}$.

Bài 13.(HV Kỹ thuật quân sự 2000)

Khai triển đa thức: $P(x) = (1+2x)^{12}$ thành dạng:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{12}x^{12}$$

Tìm $\max(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$.

A. 126720 C. 102012

B. 120102 D. 201202

Bài giải

$P(x) = (1+2x)^{12} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{12}x^{12}$

$a_k = C_{12}^{k}.2^{k}$; $a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow k < \frac{23}{3}$

$\Rightarrow \max_{i=\overline{1,12}}(a_i) = a_8 = C_{12}^{8} = 126720$

Bài 14.(ĐH Cảnh sát nhân dân khối A 2000)

Tính tổng sau :

$$S = \frac{1}{2}C_{2018}^{0} - \frac{1}{4}C_{2018}^{1} + \frac{1}{6}C_{2018}^{2} - \frac{1}{8}C_{2018}^{3} + \ldots + \frac{1}{4038}.C_{2018}^{2018}$$

A. $\frac{1}{2019}$ C. $\frac{1}{4020}$

B. $\frac{1}{4037}$ D. $\frac{1}{4038}$

Bài giải

- Tính I bằng 2 cách:

  * Đổi biến: $t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2xdx$

$$\Rightarrow I = \int_1^0 \left(-\frac{1}{2}t^n\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{2(n+1)}t^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}$$

  * Khai triển nhị thức:

$$x(1 - x^2)^n = x\left(C_n^0 - C_n^1x^2 + C_n^2x^4 - C_n^3x^6 + \ldots + (-1)^nC_n^nx^{2n}\right)$$

$$\Rightarrow I = \left(C_n^0.\frac{x^2}{2} - C_n^1.\frac{x^4}{4} + C_n^2.\frac{x^6}{6} - C_n^3.\frac{x^8}{8} + \ldots + (-1)^nC_n^n.\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

Bài 15.(CĐ Cảnh sát nhân dân khối A 2000)

Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của biểu thức:

$(x + 1)^4 + (x + 1)^5 + (x + 1)^6 + (x + 1)^7$

A. 28 C. 36

B. 13 D. 16

Bài giải

Hệ số của x^5 trong khai triển của biểu thức:

$(x + 1)^4 + (x + 1)^5 + (x + 1)^6 + (x + 1)^7$

là: $C_5^5 + C_6^5 + C_7^5 = 1 + \frac{6!}{5!1!} + \frac{7!}{5!2!} = 28$

Bài 16.(ĐH An Ninh khối A 2001)

Tìm các số âm trong dãy số $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ với

$$x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

A. x_1 và x_2

B. x_2 và x_3

C. x_3 và x_4

D. x_1, x_2 và x_3

Bài giải

Ta phải tìm các số tự nhiên n > 0 thoả mãn:

$$x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n} < 0 \quad \Leftrightarrow (n+3).(n+4) - \frac{143}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 28n - 95 < 0 \quad \Leftrightarrow -\frac{19}{2} < n < \frac{5}{2}$$

Vì n là số nguyên dương nên ta được n = 1, 2 ⇒ các số hạng âm của dãy là x_1, x_2.

Bài 17.(ĐH Đà Nẵng khối A 2001)

Hãy tính tổng:

$$S = C_{2018}^0 + \frac{1}{2}C_{2018}^1.2 + \frac{1}{3}C_{2018}^2.2^2 + \frac{1}{4}C_{2018}^3.2^3 + \ldots + \frac{1}{2019}.C_{2018}^{2018}.2^{2018}$$

A. $\frac{3^{2019}-1}{4038}$

B. $\frac{3^{2019}-1}{2019}$

C. $\frac{3^{2019}+1}{4038}$

D. $\frac{3^{2019}+1}{2019}$

Bài giải

Có $\frac{1}{k+1}C_n^k.2^k = \frac{1}{2(k+1)}C_n^k.x^{k+1}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 C_n^k x^k dx$

$$\Rightarrow S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1.2 + \frac{1}{3}C_n^2.2^2 + \frac{1}{4}C_n^3.2^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n.2^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k.2^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\int_0^2 C_n^k x^k dx = \frac{1}{2}\int_0^2\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (x+1)^n dx = \frac{1}{2}.\left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_0^2 = \frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}$$

Bài 18.(ĐH Hàng Hải 2001)

Tính tổng: $S = C_{2018}^0 + C_{2018}^2.3^2 + C_{2018}^4.3^4 + ... + C_{2018}^{2018}.3^{2018}$

A. $2^{2018}\left(2^{2017}+1\right)$

C. $2^{2017}\left(2^{2018}+1\right)$

B. $2^{2018}\left(2^{2019}+1\right)$

D. $2^{2018}\left(2^{2018}+1\right)$

Bài giải

Ta có: $(1+3)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1.3^1 + C_{2n}^2.3^2 + ... + C_{2n}^{2n}.3^n$

$(1-3)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1.3^1 + C_{2n}^2.3^2 - ... + C_{2n}^{2n}.3^n$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên, ta được:

$4^{2n} + 2^{2n} = 2\left(C_{2n}^0 + C_{2n}^2.3^2 + ... + C_{2n}^{2n}.3^{2n}\right)$

Từ đó ta được: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2.3^2 + C_{2n}^4.3^4 + ... + C_{2n}^{2n}.3^{2n} = 2^{2n-1}(2^{2n}+1)$

Bài 19.(ĐH Luật TPHCM khối A 2001)

Tính tổng: $S = C_{2018}^1.3^{2017} + 2C_{2018}^2.3^{2016} + 3C_{2018}^3.3^{2015} + 2018.C_{2018}^{2018}$

A. 2017.4^{2017}

C. 2018.4^{2017}

B. 2017.4^{2018}

D. 2018.4^{2018}

Bài giải

Xét hàm số: $f(x) = (x+3)^n = C_n^0 3^n + C_n^1.3^{n-1}x + ... + C_n^n.x^n$

Ta có: $f'(x) = n(x+3)^{n-1} = C_n^1.3^{n-1} + 2C_n^2.3^{n-2}x + ... + nC_n^n x^{n-1}$

Cho x = 1, ta được:

$f'(1) = n.4^{n-1} = C_n^1.3^{n-1} + 2.C_n^2.3^{n-2} + 3.C_n^3.3^{n-3} + ... + n.C_n^n$ (đpcm)

Bài 20.(ĐHSP HN khối A 2001)

Trong khai triển của $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_9x^9 + a_{10}x^{10} \quad (a_k \in R)$$

hãy tìm hệ số a_k lớn nhất ($0 \le k \le 10$).

A. $\dfrac{C_{14}^{8}.2^4}{3^{11}}$

B. $\dfrac{C_{11}^{9}.2^7}{3^{12}}$

C. $\dfrac{C_{10}^{8}.2^8}{3^{9}}$

D. $\dfrac{C_{10}^{7}.2^7}{3^{10}}$

Bài giải

Ta có: $a_{k-1} \le a_k \Leftrightarrow C_{10}^{k-1}.2^{k-1} \le C_{10}^{k}.2^k \Leftrightarrow \dfrac{1}{(k-1)!(11-k)!} \le \dfrac{2}{k!(10-k)!}$

$\Leftrightarrow k \le 2(11-k) \Leftrightarrow k \le \dfrac{22}{3}$

Vậy hệ số a_7 là lớn nhất: $a_7 = \dfrac{1}{3^{10}}.C_{10}^{7}.2^7$.

Bài 21.(ĐH Vinh khối DTM 2001)

Tính tổng: $S = C_{2001}^{0} + 3^2C_{2001}^{2} + 3^4C_{2001}^{4} + 3^{2000}.C_{2001}^{2000}$

A. $2^{2000}\left(2^{2001}-1\right)$

B. $2^{2000}\left(2^{2001}+1\right)$

C. $2^{2001}\left(2^{2001}-1\right)$

D. $2^{2001}\left(2^{2000}-1\right)$

Bài giải

Ta có: $(x+1)^{2001} = \sum_{k=0}^{2001} C_{2001}^{k}.x^k$

$(-x+1)^{2001} = \sum_{k=0}^{2001} C_{2001}^{k}.(-x)^k$

Cộng lại ta được:

$(x+1)^{2001} + (-x+1)^{2001} =$

$= 2\left(C_{2001}^{0} + x^2C_{2001}^{2} + x^4C_{2001}^{4} + \dots + x^{2000}C_{2001}^{2000}\right)$

Cho x = 3 ta được:

$4^{2001} - 2^{2001} = 2\left(C_{2001}^{0} + 3^2C_{2001}^{2} + 3^4C_{2001}^{4} + \dots + 3^{2000}C_{2001}^{2000}\right)$

$$\Rightarrow C_{2001}^{0}+3^{2}C_{2001}^{2}+3^{4}C_{2001}^{4}+...+3^{2000}C_{2001}^{2000}=2^{2000}(2^{2001}-1)$$

Bài 22.(ĐH khối A 2002)

Cho khai triển nhị thức:

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}}+2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n}=C_{n}^{0}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n}+C_{n}^{1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)+...+$$
$$+C_{n}^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1}+C_{n}^{n}\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n}$$

(n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_{n}^{3}=5C_{n}^{1}$ và số hạng thứ tư bằng 20. Tính $x+n$.

A. 20 C. 11

B. 34 D. 5

Bài giải

Từ $C_{n}^{3}=5C_{n}^{1}$ ta có n ≥ 3 và $\frac{n!}{3!(n-3)!}=5\frac{n!}{(n-1)!}\Leftrightarrow\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=5n$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^{2}-3n-28=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=-4\quad(\text{loại})\\n=7\end{array}\right.$

Với n = 7 ta có: $C_{7}^{3}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{3}=140\Leftrightarrow 35.2^{2x-2}.2^{-x}=140$

$\Leftrightarrow 2^{x-2}=4\Leftrightarrow x=4.$

Vậy n = 7, x = 4.

Bài 23.(ĐH khối B 2002)

Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ (n ≥ 2, n nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$. Tìm n?

A. $n=8$ C. $n=4$

B. $n=12$ D. $n=11$

Bài giải

Số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ là C_{2n}^3.

Gọi đường chéo của đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2n}$ đi qua tâm đường tròn (O) là đường chéo lớn thì đa giác đã cho có n đường chéo lớn.

Mỗi hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ có các đường chéo là hai đường chéo lớn. Ngược lại, với mỗi cặp đường chéo lớn ta có các đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật nói trên bằng số cặp đường chéo lớn của đa giác $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$, tức C_n^2.

Theo giả thiết thì:

$$C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20.\frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow 2n - 1 = 15 \Leftrightarrow n = 8.$$

Bài 24.(ĐH khối D 2002)

Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^nC_n^n = 243$$

A. $n = 8$ C. $n = 17$

B. $n = 5$ D. $n = 14$

Bài giải

Ta có: $(x + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

Cho x = 2 ta được: $3^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k \Rightarrow 3^n = 243 \Leftrightarrow n = 5.$

Bài 25.(ĐH dự bị 2 2002)

Có bao nhiêu số n nguyên dương thoả mãn bất phương trình: $A_n^3 + 2C_n^{n-2} \le 9n$.

A. 0 C. 1

B. 2 D. 3

Bài giải

BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3 \\ n(n-1)(n-2) + n(n-1) \leq 9n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3 \\ n^2 - 2n - 8 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 3 \leq n \leq 4 \Leftrightarrow n = 3$ hoặc $n = 4$.

Bài 26.(ĐH dự bị 4 2002)

Giả sử n là số nguyên dương và:

$$(1 + x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n$$

Biết rằng tồn tại số k nguyên ($1 \leq k \leq n - 1$) sao cho $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$.

Hãy tính n.

A. $n = 5$

B. $n = 5$

C. $n = 10$

D. $n = 7$

Bài giải

Ta có: $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$ (1) ($1 \leq k \leq n - 1$)

$\Leftrightarrow \frac{C_n^{k-1}}{2} = \frac{C_n^k}{9} = \frac{C_n^{k+1}}{24}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{1}{9}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{24}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

$\Leftrightarrow 2.(k-1)!(n-k+1)! = 9.k!(n-k)! = 24.(k+1)!(n-k-1)!$

$\Leftrightarrow 2.(n-k+1)(n-k) = 9.k(n-k) = 24.(k+1)k$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(n-k+1) = 9k \\ 9(n-k) = 24(k+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2n+2}{11} \\ k = \frac{3n-8}{11} \end{cases}$

Để tồn tại k thoả mãn hệ thức (1), điều kiện ắt có và đủ là:

$3n - 8 = 2n + 2 \Leftrightarrow n = 10$.

Bài 27.(ĐH dự bị 6 2002)

Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ là các hệ số trong khai triển sau:

$(x + 1)^{10}.(x + 2) = x^{11} + a_1x^{10} + a_2x^9 + \ldots + a_{11}$.

Hãy tính hệ số a_5.

A. 672 C. 201

B. 246 D. 329

Bài giải

Ta có: $(x + 1)^{10} = x^{10} + C_{10}^1x^9 + C_{10}^2x^8 + C_{10}^3x^7 + \ldots + C_{10}^9x + 1$

$\Rightarrow (x + 1)^{10}(x + 2) = x^{11} + C_{10}^1x^{10} + C_{10}^2x^9 + C_{10}^3x^8 + \ldots + C_{10}^9x^2 + x +$

$+ 2\left(x^{10} + C_{10}^1x^9 + C_{10}^2x^8 + C_{10}^3x^7 + \ldots + C_{10}^9x + 1\right)$

$= x^{11} + \left(C_{10}^1 + 2\right)x^{10} + \left(C_{10}^2 + C_{10}^1.2\right)x^9 + \left(C_{10}^3 + C_{10}^2.2\right)x^8 + \ldots +$

$+ \left(C_{10}^9 + C_{10}^8.2\right)x^2 + \left(C_{10}^{10} + C_{10}^9.2\right)x + 2$

$= x^{11} + a_1x^{10} + a_2x^9 + \ldots + a_{11}$

Vậy $a_5 = C_{10}^5 + 2C_{10}^4 = 672$.

Bài 28.(ĐH khối A 2003)

Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng: $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$ (n nguyên dương, x > 0).

A. 194 C. 495

B. 346 D. 102

Bài giải

Ta có: $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) \Leftrightarrow \left(C_{n+3}^{n+1} + C_{n+3}^n\right) - C_{n+3}^n = 7(n+3)$

$\Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+3)}{2!} = 7(n + 3) \Leftrightarrow n + 2 = 7.2! = 14 \Leftrightarrow n = 12.$

Số hạng tổng quát của khai triển là:

$$C_{12}^k(x^{-3})^k\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k} = C_{12}^kx^{\frac{60-11k}{2}}$$

Ta có: $x^{\frac{60-11k}{2}} = x^8 \Leftrightarrow \frac{60-11k}{2} = 8 \Leftrightarrow k = 4.$

Do đó hệ số của số hạng chứa x^8 là $C_{12}^4 = \frac{12!}{4!(12-4)!} = 495.$

Bài 29.(ĐH khối B 2003)

Tính tổng: $S = C_{2018}^0 + \frac{2^2-1}{2}C_{2018}^1 + \frac{2^3-1}{3}C_{2018}^2 + \ldots + \frac{2^{2019}-1}{2019}C_{2018}^{2018}$

A. $\frac{3^{2019}-2^{2019}}{2019}$

D. $\frac{3^{2018}-2^{2018}}{2019}$

B. $\frac{3^{2018}-2^{2018}}{2018}$

C. $\frac{3^{2019}-2^{2019}}{2018}$

Bài giải

Ta có: $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n$

$$\Rightarrow \int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 \left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_1^2 = \left(C_n^0x + C_n^1\frac{x^2}{2} + C_n^2\frac{x^3}{3} + \ldots + C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$$

Bài 30.(ĐH khối D 2003)

Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2 + 1)^n(x + 2)^n$.

Có bao nhiêu số n để $a_{3n-3} = 26n$.

A. 0

D. 1

B. 3

C. 2

Bài giải

Ta có: $(x^2+1)^n = C_n^0 x^{2n} + C_n^1 x^{2n-2} + C_n^2 x^{2n-4} + \ldots + C_n^n$

$(x+2)^n = C_n^0 x^n + 2C_n^1 x^{n-1} + 2^2 C_n^2 x^{n-2} + 2^3 C_n^3 x^{n-3} + \ldots + 2^n C_n^n$

Dễ dàng kiểm tra n = 1, n = 2 không thoả mãn điều kiện bài toán.

Với $n \geq 3$ thì $x^{3n-3} = x^{2n}x^{n-3} = x^{2n-2}x^{n-1}$

Do đó hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của:

$(x^2+1)^n(x+2)^n$

là: $a_{3n-3} = 2^3.C_n^0.C_n^3 + 2.C_n^1.C_n^1$

$$\Rightarrow a_{3n-3} = 26n \Leftrightarrow \frac{2n(2n^2-3n+4)}{3} = 26n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = -\frac{7}{2} \ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy: n = 5.

Bài 31.(ĐH khối D 2003 dự bị 2)

Có bao nhiêu số tự nhiên n thoả mãn:

$$C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 100$$

A. 0 D. 2

B. 1 C. 3

Bài giải

Ta có: $C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 100$

$\Leftrightarrow \left(C_n^2\right)^2 + 2C_n^2 C_n^3 + \left(C_n^3\right)^2 = 100$

$\Leftrightarrow \left(C_n^2 + C_n^3\right)^2 = 100 \quad \Leftrightarrow C_n^2 + C_n^3 = 10$

$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 10$

$\Leftrightarrow 3n(n-1) + (n^2-n)(n-2) = 60$

$\Leftrightarrow (n^2-n)(n+1) = 60$

$\Leftrightarrow (n-1)n(n+1) = 3.4.5$

$\Leftrightarrow n = 4.$

Bài 32.(CĐ Sư phạm Bến Tre khối A 2002)

Có bao nhiêu số tự nhiên x thỏa: $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$

A. 0 D. 1

B. 3 C. 2

Bài giải

1. Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 2 \\ x \ge 3 \\ x \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x \in N \end{cases}$

PT $\Leftrightarrow x + 6\dfrac{x!}{2!(x-2)!} + 6\dfrac{x!}{3!(x-3)!} = 9x^2 - 14x$

$\Leftrightarrow x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = 9x^2 - 14x$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 9x + 14) - 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \text{(loại)} \\ x = 7 & \text{(loại)} \\ x = 2 & \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2$

Bài 33.(CĐ Giao thông II 2003)

Cho số nguyên dương n ≥ 2. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = C_n^0 C_n^1 ... C_n^n$.

A. $P_{\max} = \left(\dfrac{2^n - 1}{n-1}\right)^n$ D. $P_{\max} = \left(\dfrac{2^n - 1}{n-1}\right)^{n-1}$

B. $P_{\max} = \left(\dfrac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}$ C. $P_{\max} = \left(\dfrac{2^n - 2}{n-1}\right)^n$

Bài giải

Do $C_n^0 = C_n^n = 1$ nên ta có: $C_n^0 C_n^1 ... C_n^n = C_n^1 C_n^2 ... C_n^{n-1}$

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$C_n^1C_n^2...C_n^{n-1} \le \left(\frac{C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$$

Áp dụng khai triển $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ với a = b = 1, ta có:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n \Rightarrow C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} = 2^n - 2$$

Suy ra: $C_n^1C_n^2...C_n^{n-1} \le \left(\frac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}$ (đpcm).

Bài 34.(CĐ Giao thông III 2003)

Tính tổng: $T = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$

biết rằng n là số nguyên dương thoả điều kiện:

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$$

A. $\frac{2^{10}-1}{10}$

D. $\frac{2^{15}-1}{15}$

B. $\frac{2^{11}-1}{11}$

C. $\frac{2^{13}-1}{13}$

Bài giải

Ta có: $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^nx^n$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^nx^n\right)dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n=1}\right|_0^1 = \left.\left(C_n^0x + \frac{1}{2}C_n^1x^2 + \frac{1}{3}C_n^2x^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right)\right|_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

Do đó: $T = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Ta có: $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow \begin{cases} n \in N, n \ge 2 \\ 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 79 \end{cases} \Leftrightarrow$ n = 12

Vậy: $T = \frac{2^{13}-1}{13}$.

Bài 35. (CĐ Tài chính kế toán IV 2003 dự bị)

Có bao nhiêu số nguyên n thỏa: $(n!)^3 C_n^n.C_{2n}^n.C_{3n}^n \le 720$

A. 1 D. 2

B. 3 C. 4

Bài giải

Điều kiện: $n \in Z, n \ge 0$.

BPT $\Leftrightarrow (n!)^3.\frac{(2n)!}{n!n!}.\frac{(3n)!}{(2n)!n!} \le 720 \Leftrightarrow (3n)! \le 720$

Ta thấy (3n)! tăng theo n và mặt khác 6! = 720 ≥ (3n)!

Do đó: BPT có nghiệm $\begin{cases} 0 \le n \le 2 \\ n \in Z \end{cases}$.

Bài 36.(CĐ Công nghiệp HN 2003)

Cho đa thức: $P(x) = (16x - 15)^{2003}$. Khai triển đa thức đó dưới dạng:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2003}x^{2003}$$

Tính tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2003}$.

A. 1 D. 2

B. 3 C. 0

Bài giải

$P(x) = (16x-15)^{2003} = \sum_{k=0}^{2003} C_{2003}^k (16x)^{2003-k}(-15)^k$

$= \sum_{k=0}^{2003} C_{2003}^k (16)^{2003-k}(-15)^k x^{2003-k}$

Các hệ số trong khai triển đa thức là: $a_k = C_{2003}^k (16)^{2003-k}(-15)^k$

Vậy: $S = \sum_{k=0}^{2003} a_k = \sum_{k=0}^{2003} C_{2003}^k (16)^{2003-k}(-15)^k = (16-15)^{2003} = 1$

Bài 37.(CĐ Nông Lâm 2003)

Tìm hệ số lớn nhất của đa thức trong khai triển nhị thức Newton của: $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{15}$.

A. $4535.\frac{2^{10}}{3^{15}}$ D. $2343.\frac{2^{10}}{3^{15}}$

B. $3003.\frac{2^{10}}{3^{15}}$ C. $3123.\frac{2^{10}}{3^{15}}$

Bài giải

Ta có: $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{15-k}\left(\frac{2}{3}\right)x^{k} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k}\frac{2^{k}}{3^{15}}x^{k}$

Gọi a_k là hệ số của x^k trong khai triển:

$$a_k = \frac{1}{3^{15}}C_{15}^{k}.2^{k};\ k = 0, 1, 2, \ldots, 15.$$

Xét sự tăng giảm của dãy a_k:

$a_{k-1} < a_k \Leftrightarrow C_{15}^{k-1}.2^{k-1} < C_{15}^{k}.2^{k} \Leftrightarrow C_{15}^{k-1} < 2C_{15}^{k}$

$\Leftrightarrow k < \frac{32}{3}, k = 0, 1,.., 15$

Từ đó: $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$

Đảo dấu BĐT trên ta được:

$a_{k-1} > a_k \Leftrightarrow k > \frac{32}{3} \Rightarrow a_{10} > a_{11} > \ldots > a_{15}$.

Vậy hệ số lớn nhất phải tìm là: $a_{10} = \frac{2^{10}}{3^{15}}C_{15}^{10} = 3003.\frac{2^{10}}{3^{15}}$

Bài 38.(ĐH khối A 2004)

Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $[1 + x^2(1 - x)]^8$.

A. 473 D. 238

B. 919 C. 371

Bài giải

Ta có: $[1 + x^2(1 - x)]^8 = C_8^0 + C_8^1x^2(1-x) + C_8^2x^4(1-x)^2 + C_8^3x^6(1-x)^3 +$
$+ C_8^4x^8(1-x)^4 + C_8^5x^{10}(1-x)^5 + C_8^6x^{12}(1-x)^6 + C_8^7x^{14}(1-x)^7 + C_8^8x^{16}(1-x)^8$

Bậc của x trong 3 số hạng đầu nhỏ hơn 8, bậc của x trong 4 số hạng cuối lớn hơn 8.

Vậy x^8 chỉ có trong các số hạng thư tư, thứ năm, với hệ số tương ứng là: $C_8^3.C_3^2;\ C_8^4.C_4^0$

Suy ra: $a_8 = 168 + 70 = 238$.

Bài 39.(ĐH khối A 2005)

Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$$

A. 919 D. 1203

B. 810 C. 1002

Bài giải

Ta có: $(1 + x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1x + C_{2n+1}^2x^2 + C_{2n+1}^3x^3 + ... + C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$

Đạo hàm 2 vế ta có:

$$(2n + 1)(1 + x)^{2n} = C_{2n+1}^1 + 2C_{2n+1}^2x + 3C_{2n+1}^3x^2 + ... + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}$$

Thay x = –2, ta có:

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - ... + (2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2n + 1$$

Theo giả thiết ta có: $2n + 1 = 2005 \Rightarrow n = 1002$.

Bài 40.(ĐH khối A 2005 dự bị 2)

Tìm hệ số của x^7 trong khai triển đa thức $(2 - 3x)^{2n}$, trong đó n là số nguyên dương thoả mãn:

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$$

A. $-C_{10}^{15}.3^{15}.2^3$ D. $C_{10}^7.3^8.2^4$

B. $C_{10}^{17}.3^{17}.2^3$ C. $-C_{10}^7.3^7.2^3$

Bài giải

Ta có: $(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + C_{2n+1}^3 x^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$

Cho x = 1 ta có: $2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$ (1)

Cho x = –1 ta có: $0 = C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 - C_{2n+1}^3 + \dots - C_{2n+1}^{2n+1}$ (2)

Lấy (1) – (2) $\Rightarrow 2^{2n+1} = 2\left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}\right)$

$\Rightarrow 2^{2n} = C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024 \Rightarrow 2n = 10$

Ta có: $(2-3x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k C_{10}^k 2^{10-k} (3x)^k$

Suy ra hệ số của x^7 là $-C_{10}^7 3^7 2^3$

Bài 41.(ĐH khối D 2005 dự bị 1)

Tìm k ∈ {0; 1; 2; …; 2005} sao cho C_{2005}^k đạt giá trị lớn nhất.

A. $\left[\begin{array}{l} k=1001 \\ k=1002 \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} k=1003 \\ k=1004 \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} k=1002 \\ k=1003 \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} k=1005 \\ k=1004 \end{array}\right.$

Bài giải

C_{2005}^k lớn nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} C_{2005}^k \ge C_{2005}^{k+1} \\ C_{2005}^k \ge C_{2005}^{k-1} \end{cases} (k \in N)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2005!}{k!(2005-k)!} \ge \dfrac{2005!}{(k+1)!(2004-k)!} \\ \dfrac{2005!}{k!(2005-k)!} \ge \dfrac{2005!}{(k-1)!(2006-k)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+1 \ge 2005-k \\ 2006-k \ge k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \ge 1002 \\ k \le 1003 \end{cases} \Leftrightarrow 1002 \le k \le 1003, k \in N.$

$\Leftrightarrow$ k = 1002 hoặc k = 1003.

Bài 42.(ĐH khối D 2005 dự bị 2)

Có bao nhiêu số nguyên n > 1 thoả mãn: $2P_n + 6A_n^2 - P_nA_n^2 = 12$.

A. 1 D. 2
B. 4 C.3

Bài giải

Ta có: $2P_n + 6A_n^2 - P_nA_n^2 = 12$ $(n \in N, n > 1)$

$\Leftrightarrow 2n! + \frac{6.n!}{(n-2)!} - n!\frac{n!}{(n-2)!} = 12 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!}(6-n!) - 2(6-n!) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6-n! = 0 \\ \frac{n!}{(n-2)!} - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n! = 6 \\ n(n-1) - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 3 \\ n^2 - n - 2 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 3 \\ n = 2 \text{ (vì } n \geq 2) \end{array}\right.$

Vậy: n = 2 hoặc n = 3.

Bài 43.(ĐH khối A 2006)

Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết rằng: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$

A. 110 D. 210
B. 410 C. 291

Bài giải

• Từ giả thiết suy ra: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20}$ (1)

Vì $C_{2n+1}^k = C_{2n=1}^{2n+1-k}$, $\forall k$, $0 \leq k \leq 2n + 1$ nên:

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = \frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^{2n+1}\right) \quad (2)$$

Từ khai triển nhị thức Newton của $(1 + 1)^{2n+1}$ suy ra:

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1} \quad (3)$$

từ (1), (2), (3) suy ra: $2^{2n} = 2^{20} \Leftrightarrow n = 10$.

• Ta có: $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^{-4})^{10-k}\left(x^7\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{11k-40}$

Hệ số của x^{26} là C_{10}^k với k thoả mãn: $11k - 40 = 26 \Leftrightarrow k = 6$

Vậy hệ số của x^{26} là $C_{10}^{6} = 210$.

Bài 44.(ĐH khối B 2006)

Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k \in \{1,2,\ldots, n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

A. 9

D. 7

B. 10

C. 11

Bài giải

Số tập con k phần tử của tập hợp A bằng C_n^k. Từ giả thiết suy ra:

$$C_n^4 = 20C_n^2 \Leftrightarrow n^2 - 5n - 234 = 0 \Leftrightarrow n = 18 \text{ (vì } n \geq 4)$$

Do $\dfrac{C_{18}^{k+1}}{C_{18}^{k}} = \dfrac{18-k}{k+1} > 1 \Leftrightarrow k < 9$, nên: $C_{18}^1 < C_{18}^2 < \ldots < C_{18}^9$

$\Rightarrow C_{18}^9 > C_{18}^{10} > \ldots > C_{18}^{18}$

Vậy số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất khi và chỉ khi $k = 9$.

Bài 45.(CĐ Sư phạm TPHCM khối A 2006)

Tính tổng $S = \dfrac{1.C_n^0}{A_1^1} + \dfrac{2.C_n^1}{A_2^1} + \dfrac{3.C_n^2}{A_3^1} + \ldots + \dfrac{(n+1).C_n^n}{A_{n+1}^1}$

Biết rằng: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 211$

A. 2^{17}

D. 2^{20}

B. 2^{50}

C. 2^{100}

Bài giải

• $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 211 \Leftrightarrow \begin{cases} n \in N, n \geq 2 \\ 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 211 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n \in N, n \geq 2 \\ n^2 + n - 420 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow n = 20$

• $\dfrac{(k+1).C_n^k}{A_{k+1}^1} = \dfrac{(k+1)C_n^k}{\dfrac{(k+1)!}{k!}} = C_n^k$ (k = 1, 2, …, n)

Do đó: với n = 20 ta có: S = $C_{20}^0 + C_{20}^1 + ... + C_{20}^{20} = 2^{20}$.

Bài 46.(CĐ Sư phạm TPHCM khối BT 2006)

Khai triển biểu thức $(1 - 2x)^n$ ta được đa thức có dạng:

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

Tìm hệ số của x^5, biết $a_0 + a_1 + a_2 = 71$.

A. 102 D. -571

B. -672 C. 487

Bài giải

Số hạng thứ k + 1 trong khai triển $(1 - 2x)^n$ là: $T_{k+1} = C_n^k(-2)^k.x^k$

Từ đó ta có: $a_0 + a_1 + a_2 = 71 \Leftrightarrow C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 = 71$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n \in N, n \geq 2 \\ 1 - 2n + 4\dfrac{n(n-1)}{2} = 71 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in N, n \geq 2 \\ n^2 + 2n - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow n = 7$

Với n = 7, ta có hệ số của x^5 trong khai triển $(1 - 2x)^n$ là:

$a_5 = C_7^5(-2)^5 = -672$.

Bài 47.(CĐ Điện lực TPHCM 2006)

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^n$,

biết rằng: $C_n^1 + C_n^3 = 13n$ (n là số tự nhiên lớn hơn 2, x là số thực khác 0).

A. 140	D. 210
B. 672	C. 102

Bài giải

Ta có: $C_n^1 + C_n^3 = 13n \Leftrightarrow n + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = 13n$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -7 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Số hạng tổng quát của khai triển nhị thức là:

$$T_{k+1} = C_{10}^k (x^2)^{10-k} (x^{-3})^k = C_{10}^k x^{20-5k}$$

T_{k+1} không chứa x $\Leftrightarrow 20 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy số hạng không chứa x là: $T_5 = C_{10}^4 = 210$.

Bài 48.(CĐ Kinh tế TPHCM 2006)

Tìm $n \in N$ sao cho: $C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + C_{4n+2}^4 + \ldots + C_{4n+2}^{2n} = 256$

A. 4	D. 3
B. 1	C. 2

Bài giải

- Cách 1: Ta có: $C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^1 + C_{4n+2}^2 + \ldots + C_{4n+2}^{4n+2} = 2^{4n+2}$

$$C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + C_{4n+2}^4 + \ldots + C_{4n+2}^{4n+2} = 2^{4n+1}$$

$$C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + C_{4n+2}^4 + \ldots + C_{4n+2}^{2n} = 2^{4n}$$

Vậy có: $2^{4n} = 256 \Leftrightarrow n = 2$

- Cách 2: Đặt $S_n = C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + C_{4n+2}^4 + \ldots + C_{4n+2}^{2n}$

Thì $S_{n+1} = C_{4n+6}^0 + C_{4n+6}^2 + C_{4n+6}^4 + \ldots + C_{4n+6}^{2n}$

Vì $C_{4n+6}^{2k} \geq C_{4n+2}^{2k}$ $(0 \leq k \leq n)$ nên $S_{n+1} > S_n \Rightarrow$ dãy (S_n) tăng.

Khi n = 2 thì $S_2 = C_{10}^0 + C_{10}^2 + C_{10}^4 = 256$

Vậy $S_n = 256 \Leftrightarrow n = 2$.

Bài 49.(CĐ Kinh tế đối ngoại khối AD 2006)

Cho $A = \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$. Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức A sẽ gồm bao nhiêu số hạng?

A. 29 số hạng

D. 43 số hạng

B. 16 số hạng

C. 21 số hạng

Bài giải

$$A = \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$$

$$= \sum_{k=0}^{20} (-1)^k C_{20}^k x^{20-k}\left(x^{-2}\right)^k + \sum_{n=0}^{10} (-1)^n C_{10}^n \left(x^3\right)^{10-k}\left(x^{-1}\right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{20} (-1)^k C_{20}^k x^{20-3k} + \sum_{n=0}^{10} (-1)^n C_{10}^n x^{30-4n}$$

Xét trường hợp $20 - 3k = 30 - 4n \Leftrightarrow 10 - n = 3(n - k)$

Vì $0 \le n \le 10$ và $10 - n$ phải là bội số của 3 nên n = 4 hay n= 7 hay n= 10

$\Rightarrow$ có 3 số hạng trong hai khai triển trên có luỹ thừa của x giống nhau.

Vậy sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức A sẽ gồm:

21 + 11 – 3 = 29 số hạng.

Bài 50.(CĐ KT Y tế I 2006)

Tìm số tự nhiên n thoả mãn đẳng thức sau:

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \ldots + C_{2n}^{2k} 3^{2k} + \ldots + C_{2n}^{2n-2} 3^{2n-2} + C_{2n}^{2n} 3^{2n} = 2^{15}(2^{16} + 1)$$

A. $n = 9$

D. $n = 6$

B. $n = 4$

C. $n = 8$

Bài giải

Ta có: $4^{2n} = (1 + 3)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 3^1 + C_{2n}^2 3^2 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} 3^{2n-1} + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$

$2^{2n} = (1 - 3)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 3^1 + C_{2n}^2 3^2 - \ldots - C_{2n}^{2n-1} 3^{2n-1} + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$

$\Rightarrow \quad 4^{2n} + 2^{2n} = 2\left(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} 3^{2n}\right)$

$\Rightarrow \quad 4^{2n} + 2^{2n} = 2.2^{15}(2^{16} + 1)$

$\Rightarrow \quad (2^{2n} - 2^{16})(2^{2n} + 2^{16} + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad 2^{2n} = 2^{16} \quad \Rightarrow n = 8.$

Bài 51.(CĐBC Hoa Sen khối D 2006)

Tìm hệ số của $x^{29}y^{8}$ trong khai triển của $(x^3 - xy)^{15}$.

A. 3023   D. 5021

B. 6435   C. 3021

Bài giải

Số hạng tổng quát: $C_{15}^{k}(-1)^{k}x^{45-2k}y^{k}$

$\Rightarrow \begin{cases} 45 - 2k = 29 \\ k = 8 \end{cases} \Leftrightarrow k = 8$

Vậy hệ số của $x^{29}y^{8}$ là: $C_{15}^{8} = 6435$.

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm số nguyên dương n lớn hơn 4 biết rằng:

$2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + ... + (3n+2)C_n^2 = 1600$

A.6   B.8   C.10   D.12

Bài 2: Tính tổng: $S_2 = \frac{C_{2013}^0}{1} + \frac{C_{2013}^1}{2} + \frac{C_{2013}^2}{3} + ... + \frac{C_{2013}^{2013}}{2014}$

$A. \frac{2^{2013}-1}{2013}$ $B. \frac{2^{2014}-1}{2014}$ $C. 2.\frac{2^{2014}-1}{2014}$ $D. 2.\frac{2^{2013}-1}{2013}$

Bài 3: Tính tổng : $S_1 = 1^2.C_{2013}^1 + 2^2.C_{2013}^2 + 3^2.C_{2013}^3 + ... + 2013^2.C_{2013}^{2013}$

$A. 2012.2013.2^{2011}$ $B. 2013.2014.2^{2011}$ $C. 2009.2011.2^{2011}$

$D. 2013.2015.2^{2011}$

Bài 4: Tìm số nguyên dương n sao cho:

$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + ... C_{2n}^{2n-1} = 2^{23}$

A.22   B.24   C.25   D.23

Bài 5: Chứng minh rằng: với mọi cặp số nguyên $k_1n(1 \le k \le n)$ ta có: $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ .Tìm số nguyên n>4 biết rằng

$2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + ... + (3n+2)C_n^n = 1600$

A.6 B.7 C.8 D.9

Bài 6: Cho n = 6 tính giá trị của: $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2$

A.924 **B**.876 **C**.614 **D**.512

Bài 7: Tính tổng $S = C_{2016}^0 + 2C_{2016}^1 + 3C_{2016}^2 + 4C_{2016}^3 + ... + 2017C_{2016}^{2016}$

$A.2016.2^{2013}$ $B.2018.2^{2015}$ $C.2014.2^{2012}$ $D.2020.2^{2018}$

Bài 8: Tìm số nguyên dương n sao cho:

$C_{2n+1}^1 - 2.2.C_{2n+1}^2 + 3.2^2.C_{2n+1}^3 - 4.2^3.C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1} = 2013$

A.1006 B.2013 C.2012 D.1008

Bài 9: Từ khai triển biểu thức

$(x-1)^{100} = a_0x^{100} + a_1x^{99} + ... + a_{98}x^2 + a_{99}x + a_{100}$. Tính tổng

$S = 100a_0.2^{100} + 99a_1.2^{99} + ... + 2a_{98}.2^2 + 1a_{99}.2^1 + 1$

A.201 B.202 C.203 D.204

Bài 10: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn

$C_{2n}^0 + 2C_{2n}^2 + 3C_{2n}^4 + ... + (n+1)C_{2n}^{2n} = 1024(n+2)$

A.5 B.6 C.7 D.8

Bài 11: Tính tổng: $S = C_{20}^0C_{12}^{11} + C_{20}^1C_{12}^{10} + ... + C_{20}^{10}C_{12}^1 + C_{20}^{11}C_{12}^0$

$A.C_{32}^{12}$ BC_{32}^{11} $C.C_{32}^{14}$ $D.C_{32}^{13}$

Bài 12: Tìm số hạng chứa x^6 của đa thức $P_{(x)} = 25x^6 + x^3(1+x)^4$

$A.36x^6$ $B.27x^6$ $C.29x^6$ $D.25x^6$

Bài 13: Tìm các số hạng (nhỏ hơn 100) là số nguyên trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}\right)^n$, biết $(P_n)^3.C_n^n.C_{2n}^n.C_{3n}^n = P_{27}$, với n là số tự nhiên

A.4536 B.2196 C. 8 D.10

Bài 14: Cho khai triển: $P(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\sqrt{x}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^k$ biết ba hệ số đầu tiên lập thành cấp số cộng. Tìm các số hạng của khai triển nhận giá trị hữu tỷ $\forall x\in N*$

A. $\frac{C_8^4}{2^4}x$ B. $\frac{1}{2^8x^2}$ và 1

C.A VÀ B D.không có đáp án nào

Bài 15:Tìm hệ số của x^5 trong dạng khai triển của:

$f(x)=\left(1-2x(1-x)\right)^8$

A. 7616 B.6272 C. –7616 D.-6272

Bài 16: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)(1+2x)^{18}$

A.125970 B.4031040 C.8062080 D.503880

Bài 17: Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển sau:

$\left(\sqrt[3]{nx^5}+\frac{1}{x^3}\right)^n$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn:

$2C_n^1+C_n^2=n^2-20$

A.1080 B.1792 C.1920 D.2048

Bài 18: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức

$P=x(1-2x)^n+x^2(1+3x)^{2n}$. Biết rằng $A_n^2-C_{n+1}^{n-1}=5$

A.3240 B.3320 C.3210

D.3340

Bài 19: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton $\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)^n$, biết rằng $A_n^2-C_{n+1}^{n-1}=4n+6$

A.880 B.1680 C.840 D.1760

Bài 20: Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Tìm số nguyên dương n biết $a_0 + 8a_1 = 2a_2 + 1$.

$A.4$ $B.5$ $C.6$ $D.7$

Bài 21: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển biểu thức $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^n$, biết n là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^4 = 13C_n^{n-2}$.

A. -6435 B.5005 C.-5005 D. -6435

Bài 22:Tìm số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của

$\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ với $x \neq 0$, biết rằng: $C_n^1 + C_n^2 = 15$ với n là số nguyên dương.

$A.40x^4$ $B.-80x^4$ $C.-40x^4$ $D.80x^4$

Bài 23: Trong khai triển $\left(a\sqrt{a} + \frac{1}{a^4}\right)^n$ cho biết hiệu số giữa hạng tử của số hạng thứ 3 và số hạng thứ 2 là 44 tìm n.

A.9 **B**.10 **C**.11 **D**.12

Bài 24: Tìm giá trị nhỏ nhất của $x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4.P_n}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$

A. $\frac{-63}{4}$ **B.** $\frac{-63}{8}$ **C.** $\frac{-95}{4}$ **D.** $\frac{-23}{24}$

Bài 25: Trong khai triển $(1+x)^n$ theo lũy thừa tăng của x, x>0 biết:

$$\begin{cases} T_3 = 4T_5 \\ T_4 = \frac{40}{3}T_6 \end{cases}$$

Giá trị của 2x+n là:

A.5 B.7 C.9 D.11